

5 класс

(Время выполнения заданий – 3 часа.


Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

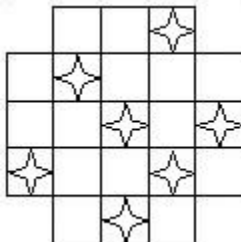
5.1. Ваня задумал число и прибавил к нему сумму цифр. Получилось 2021. Какое число мог задумать Ваня?

5.2. Маша съедает тарелку каши за 12 минут, а Медведь – в два раза быстрее. За какое время они съедят шесть тарелок каши?

5.3. С помощью арифметических действий и скобок составить верное равенство:

$$2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 = 2020.$$

5.4. Разделить поле на уголки  так, чтобы в каждом уголке было по одной звезде. (Уголки можно поворачивать.)



5.5. Ёжики собрали 65 грибов и поделили их так, чтобы каждому досталось хотя бы по одному грибу, но ни у каких двух ежиков не было одинакового количества грибов. Какое наибольшее количество ёжиков могло быть?

6 класс

(Время выполнения заданий – 3 часа.

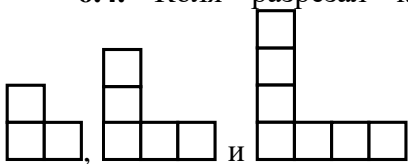
Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

6.1. Найдите самое большое шестизначное число, все цифры которого различны, и каждая из цифр, кроме крайних, равна либо сумме, либо разности соседних с ней цифр.

6.2. Два велосипедиста собрались доехать из пункта A в пункт B . Скорость первого из них равна 35 км/ч, второго – 25 км/ч. Известно, что каждый из них ехал только тогда, когда другой отдыхал (стоял на месте), а всего за 2 часа они проехали одинаковое расстояние. Могли ли они доехать за 2 часа до пункта B , расположенного на расстоянии 30 км от пункта A ?

6.3. Найдите все решения ребуса: $TUK + TUK + TUK + TUK + TUK = CTUK$. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры.

6.4. Коля разрезал квадрат 120×120 на уголки видов



а Вася разрезал такой же квадрат на уголки тех же видов, но другим способом. Мог ли Вася получить на 11 уголков больше, чем Коля? (Уголки можно поворачивать.)

6.5. В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 4×4 . В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

7 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

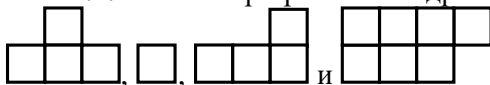
Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

7.1. Пальмовое масло подорожало на 10%. Из-за этого сыр одного из производителей подорожал на 3%. Какой процент пальмового масла в сыре этого производителя?

7.2. Три велосипедиста выезжают из города. Скорость первого из них равна 12 км/ч, второго – 16 км/ч, третьего – 24 км/ч. Известно, что первый из них ехал ровно тогда, когда второй и третий отдыхали (стояли на месте), и что ни в какой момент времени одновременно два велосипедиста не ехали. Также известно, что за 3 часа все трое проехали одинаковое расстояние. Найдите это расстояние.

7.3. Число B получается из числа A по следующему правилу: одновременно изменяются все цифры числа A . При этом если цифра больше 2, то из нее можно вычесть 2, а если цифра меньше 8, то к ней можно прибавить 2 (например, цифра 4 может быть заменена на 2, либо на 6, а цифра 9 должна быть заменена только на 7). Может ли сумма чисел A и B равняться 2345678?

7.4. Коля разрезал квадрат 120×120 на фигурки видов



, а Вася разрезал такой же квадрат на фигурки тех же видов, но другим способом. Мог ли Вася получить на 5 фигурок больше, чем Коля? (Фигурки можно поворачивать и переворачивать.)

7.5. 16 путешественников, каждый из которых лжец или рыцарь (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду), поселились в 3 комнатах гостиницы. Когда все собрались в своих номерах, Василий, проживающий в первом номере, сказал: «В этом номере сейчас находится больше лжецов, чем рыцарей. Хотя нет – в этом номере сейчас находится больше рыцарей, чем лжецов». После чего Василий зашел во второй номер и сказал там те же два утверждения. А после этого он зашел в третий номер и там тоже сказал те же два утверждения. Какое количество рыцарей могло быть среди этих 16 путешественников?

8 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

8.1. Если в произведении двух натуральных чисел один сомножитель увеличить на 2, а другой уменьшить на 2, то произведение чисел не изменится. Докажите, что если к этому произведению прибавить 1, то получится квадрат целого числа.

8.2. На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 3 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 2 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

8.3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота AH , а из середины M стороны AB опущен перпендикуляр MK на сторону AC . Оказалось, что $AH = MK$. Найдите периметр треугольника ABC , если $AK = a$.

8.4. В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5 . В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

8.5. Есть 90 карточек – 10 с цифрой 1, 10 с цифрой 2, ..., 10 с цифрой 9. Из всех этих карточек составили два числа, одно из которых в три раза больше другого. Докажите, что одно из этих чисел можно разложить на четыре не обязательно различных натуральных множителя, больших единицы.

9 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа..

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

9.1. Дано выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, где x и y – натуральные числа.

Если число x увеличить на 2, а число y уменьшить на 2, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xу+1$ – квадрат целого числа.

9.2. На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 4 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 3 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

9.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^3 > y^2$ и $y^3 > x^2$. Докажите, что $y > 1$.

9.4. В замке 9 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 3×3 . В эти комнаты по одному человеку поселилось 9 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 9 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 9 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

9.5. На данной окружности ω выбрана фиксированная точка A . Выберем на окружности две произвольные точки B и C , и найдем точку D пересечения биссектрисы угла ABC с окружностью ω . Пусть K – такая точка, что точка D – середина отрезка AK . Прямая KC вторично пересекает окружность в точке P ($P \neq C$). Докажите, что точка P не зависит от выбора точек B и C .

10 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

10.1. Найдите сумму $\sin x + \sin y + \sin z$, если известно, что $\sin x = \operatorname{tg} y$, $\sin y = \operatorname{tg} z$, $\sin z = \operatorname{tg} x$.

10.2. Дано выражение $A = xy + yz + zx$, где x, y, z – целые числа. Если число x увеличить на 1, а числа y и z уменьшить на 2, то значение выражения A не изменится. Докажите, что число $(-1) \cdot A$ – квадрат целого числа.

10.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^7 > y^6$ и $y^7 > x^6$. Докажите, что $x + y > 2$.

10.4. В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 4×4 . В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH . Точка P симметрична точке A относительно прямой BC . Прямая CH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ACP , в точке K . Прямая KP пересекает отрезок AB в точке M . Докажите, что $AC = CM$.

11 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

11.1. Дано выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$, где x и y – натуральные

числа. Если число x увеличить на 4, а число y уменьшить на 4, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy + 4$ – квадрат целого числа.

11.2. На доске написано 4 числа. Вася умножил первое из этих чисел на $\sin \alpha$, второе – на $\cos \alpha$, третье – на $\operatorname{tg} \alpha$, четвертое – на $\operatorname{ctg} \alpha$ (для некоторого угла α) и получил набор из тех же 4 чисел (возможно записанных в другом порядке). Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на доске?

11.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^5 > y^4$ и $y^5 > x^4$. Докажите, что $x^3 > y^2$.

11.4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне BC , проведенный через ее середину – точку M , пересекает сторону AB в точке K . Окружность с диаметром KC пересекает отрезок CD в точке P ($P \neq C$). Докажите, что прямые MP и AD перпендикулярны.

11.5. В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5 . В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.